PROBLEM PODRĘCZNIKÓW DO EDUKACJI MATEMATYCZNEJ 6-LATKÓW

THE PROBLEM OF MATHEMATICS EDUCATION TEXTBOOKS FOR 6-YEAR-OLDS

Zbigniew Semadeni

Wyższa Szkoła Gospodarki Euroregionalnej
im. Alcide De Gasperi w Józefowie

Abstract: *One of the matters subject to hot discussions are the effects of the decision taken by the Ministry of Education on lowering the school age. How the six-year-olds are to function in the school reality? The problem is complicated pedagogically, sociologically and organizationally. The purpose of this paper is an analysis of the textbooks for mathematical education which are to be used in grade I and the next ones by the current and future six-year-olds.*

Standard of the handbooks available in the market leaves much to be desired. This paper analyzes improper trends which manifest themselves in a part of textbooks.

During 1999–2008 the early learning was dominated by the slogan of the integration of subjects, which was often wrongly understood. Currently a trend is seen again to print as separate books the mathematical part of textbooks for grade I, separated from parts designed for the Polish language-social education. Generally they are of the form of exercise books where the student writes and draws.

According to the new Curriculum Base "children are allowed to use the exercise books for no longer than a fourth of the time assigned to mathematical education".

The remainder should allocated toplaying and to problem situationsexplored by manipulating building blocks, counters and other aids.

In the analysis presented in this paper, the textbooks from which the examples were taken remain anonymous. Their authors and publishers are not mentioned. The purpose of this paper is not a criticism of individual textbooks but just ***signalling some disturbing general phenomena.*** *The an analysis does not refer to various unfortunate (even though numerous), semantically wrongly chosen concrete situations, not to individual cases of incomprehensibly formulated orders. The paper deals with* ***the phenomena which concern many Polish textbook*** *and reflects some weakness of the early teaching.*

Keywords: *handbook*, *Curriculum Base*, *six-year-olds students, mathematical education*

Wprowadzenie

Jednym z gorąco dyskutowanych obecnie problemów są skutki decyzji MEN o obniżeniu wieku szkolnego. Jak 6-latki będą funkcjonować w nowej rzeczywistości szkolnej?

Problem jest złożony pedagogicznie, socjologicznie, organizacyjnie. Celem artykułu jest analiza podręczników do edukacji matematycznej, które mają być używane w klasie I i w następnych przez obecne i przyszłe 6-latki. W artykule tym wykorzystuję materiały, które przygotowałem w 2009 r. w ramach projektu badawczego kierowanego przez prof. Z. Marciniaka (*Strategia nauczania matematyki w Polsce*, 2011; 143-144). Koncentruję się tu na klasie I, w której niepożądane zjawiska są szczególnie widoczne. W innych artykułach sygnalizuję bardzo poważne problemy, które się pojawią około roku 2016, gdy ta fala 6-latków dojdzie do klasy IV (Semadeni 2012a oraz Semadeni 2012b).

Jakość podręczników dostępnych na rynku pozostawia wiele do życzenia. W pracy tej analizujemy niedobre tendencje ujawniające się w części podręczników.

Analiza obecnych polskich podręczników do klasy I prowadzona jest z dwóch punktów widzenia:

– zgodności tych podręczników ze stanem wiedzy psychologicznej dotyczących rozwoju pojęć matematycznych u dzieci w wieku 6–9 lat i wiedzy dydaktycznej dotyczącej edukacji matematycznej wczesnoszkolnej;

– zgodności tych podręczników z podstawą programową obowiązującą w momencie ich dopuszczania przez MEN.

W latach 1999–2008 w nauczaniu początkowym dominowało hasło integracji przedmiotowej, nieraz opacznie rozumianej (Jaroni, 2008; Klus-Stańska, Nowicka, 2009). Obecnie wróciła tendencja, by matematyczne części podręczników do I klasy były drukowane w samodzielnych książeczkach, oddzielone od części przeznaczonych do edukacji polonistyczno-społecznej. Mają one na ogół postać zeszytów ćwiczeń, w których uczeń pisze i rysuje.

Zgodnie z nową podstawą programową, „dzieci mogą korzystać z zeszytów ćwiczeń najwyżej przez jedną czwartą czasu przeznaczonego na edukację matematyczną”. Pozostała część powinna być przeznaczona na zabawy, gry i sytuacje zadaniowe, w których dzieci manipulują klockami, żetonami i innymi pomocami.

W prezentowanej tu analizie podręczniki, z których zaczerpnięto rozpatrywane przykłady, pozostają anonimowe. Ich autorzy i wydawcy nie są wymienieni. Celem tej pracy nic jest bowiem krytykowanie poszczególnych podręczników, lecz **zasygnalizowanie pewnych niepokojących, ogólnych zjawisk**.

Należy tu wyraźnie zastrzec, że nie analizuje się tu rozmaitych niefortunnych (jakkolwiek licznych), semantycznie źle dobranych sytuacji zadaniowych ani pojedynczych przypadków niezrozumiale sformułowanych poleceń. Przedmiotem analizy są **zjawiska, które dotyczą wielu polskich podręczników** i są odbiciem słabości polskiej edukacji początkowej, jakkolwiek podobne zjawiska widoczne są też w innych krajach.

1. Ogólny problem podręczników do zreformowanej szkoły

Znane jest zjawisko bezwładności materiału podręcznikowego przy reformach szkolnych. Pisał już o tym m.in. holenderski matematyk H. Freudenthal, stwierdzając, że w wielu krajach w wyniku zasadniczych reform edukacyjnych, gdy znacząco zmieniają się cele nauczania i założenia programowe, z reguły zmieniają się okładki i przedmowy w podręcznikach oraz sposób ich reklamowania, natomiast **podstawowy repertuar zadaniowy pozostaje zasadniczo niezmieniony**. Dobre, wypróbowane zadania są efektem wielu lat pracy, czasem pracy pokoleń nauczycieli, i nie da się ich zastąpić nowymi zadaniami w ciągu paru lat od chwili ogłoszenia reformy).

W 1999 roku doprowadzono w Polsce do zasadniczej reformy systemu szkolnego. Zadeklarowano m.in. gruntowną zmianę koncepcji nauczania początkowego. Jednakże jeśli przeanalizuje się podręczniki wydane w ostatnich 12 latach, przedstawiane jako zgodne z duchem reformy i z nową *Podstawą Programową* z 1999 roku, można łatwo stwierdzić, że ogromna część materiału dotyczącego edukacji matematycznej stanowi stosunkowo niewielką modyfikację tego, co było w podręcznikach wydanych przed 1999 r. Jeśli nawet pojawiają się inne zadania, to wpisane są w dawne schematy myślenia. Wiele słusznych założeń ówczesnej reformy nauczania początkowego nie znalazło odbicia w dopuszczonych od 1999 r. przez MEN podręcznikach. Nadal pojawiały się zadania, które już wcześniej krytykowano jako niezgodne z naturalnym rozwojem dziecka. W dalszej części znajdują się charakterystyczne tego przykłady.

Obecnie problem ten rysuje się wyjątkowo ostro. Realnym zagrożeniem jest to, że nowe podręczniki dla I klasy dla 6-latków przejmą zbyt dużo materiału, i to zbyt dosłownie, z wcześniejszych podręczników dla 7-latków. Podobnie można obawiać się, że rok później podręczniki do II klasy dla 7-latków będą zbliżone zakresem materiału i poziomem abstrakcji do dotychczasowych podręczników dla 8-latków itd.

Niniejsza analiza obecnych polskich podręczników koncentruje się na edukacji matematycznej, i na podręcznikach do klasy I szkoły podstawowej zatwierdzonych w 2009 r. Odzwierciedlają one pewne stabilne zjawiska. Nie jest jasne, czy nowe podręczniki, które mają pojawić się po roku 2012 w księgarniach, będą istotnie lepsze, łatwiejsze i lepiej dostosowane do naturalnego rozwoju dzieci od podręczników z 2009 r., które przygotowywano w pośpiechu, powielając często wcześniejsze niedobre schematy (nierzadko wbrew nowej podstawie programowej).

Problem jest złożony. Jednym z jego aspektów jest to, że nie można było zrealizować projektu jednorazowego obniżenia wieku szkolnego. Z wielu powodów (demograficznych, organizacyjnych, politycznych) zdecydowano się na stopniowe (aczkolwiek liczbowo trudno przewidywalne) zwiększanie co roku procentu 6-latków przyjmowanych do klasy I. Obniżanie wieku uczniów klasy I rozłożono początkowo na trzyletni okres 2009–2012, który następnie wydłużono.

Dla ułatwienia wyboru podręczników przez nauczycieli i rodziców umieszczenie logo reformy jest dozwolone jedynie na podręcznikach dopuszczonych przez MEN, uwzględniających nową podstawę programową. Jednakże czy to logo rzeczywiście gwarantuje, że podręcznik realizuje założenia reformy?

Celem prowadzonej tu analizy jest próba odpowiedzi na pytania:

1. Do jakiego stopnia uzasadniona jest obawa, wyrażana po opublikowaniu nowej podstawy w grudniu 2008 r., że w nowych podręcznikach, reklamowanych jako dostosowane do reformy i do obniżonego wieku szkolnego, pojawią się treści i formy niedostosowane do naturalnego rozwoju 6-latków?
2. Co można zrobić, aby minimalizować efekty tego zagrożenia?
3. Czy nauczyciele i rodzice mogą mieć zaufanie, że podręcznik dopuszczony przez MEN jest rzeczywiście zgodny z podstawą programową?
4. Czy podręcznik może zawierać nieoznakowane treści, które wyraźnie wykraczają poza wymagania sformułowane w podstawie (w szczególności treści wymienione w podstawie dla następnych klas)?
5. Do jakiego stopnia podręcznik powinien uwzględniać ogólne założenia reformy i w jaki sposób można to obiektywnie stwierdzić?

Pytania te są zasadne, bowiem część obecnie funkcjonujących na rynku, dopuszczonych przez MEN podręczników dla uczniów klasy I nie spełnia tych oczywistych, zdawałoby się, wymagań.

Analizowane podręczniki różnią się znacznie pod względem ich jakości dydaktycznej. Niektórych z nich dalsze uwagi dotyczą w niewielkim stopniu, w innych natomiast widać znaczne nagromadzenie usterek czy nawet wyraźnych błędów dydaktycznych.

Oprócz podręczników przedmiotem badania były też towarzyszące im zeszyty ćwiczeń, również te, które nie mają statusu środka dopuszczonego przez MEN, ale znajdują się w jednym pakiecie z podręcznikiem dopuszczonym i traktowane są przez nauczyciela jako integralna część pakietu. Wydawcy umieszczają zresztą zdania typu „zeszyt zintegrowany z podręcznikiem dopuszczonym...” lub „karty pracy do podręcznika dopuszczonego...”, co bez uważnego wczytania się można odebrać jako informację o dopuszczeniu tego zeszytu.

Słowo „zintegrowany” w tytułach niektórych podręczników sygnalizuje, że ta część pakietu dotyczy (szeroko rozumianego) języka polskiego, a treści matematyczne prezentowane są w innej części pakietu, na której nie ma już słowa „zintegrowany”.

Może się zdarzyć, że dopuszczenie MEN dotyczy tylko „podręcznika zintegrowanego”, który zawiera niewiele matematyki, a ćwiczenia matematyczne znajdują się głównie w nieopiniowanym „zeszycie”. Prezentowana tu analiza pokazuje jednak, że nawet w recenzowanych częściach wielu pakietów można znaleźć niedopuszczalną liczbę dydaktycznie niewłaściwych zadań. Recenzowanie nie jest wystarczającą gwarancją jakości podręcznika.

W rozporządzeniu Ministra Edukacji Narodowej z 8 czerwca 2009 roku czytamy: „Podręcznik do kształcenia ogólnego może zawierać materiały pomocnicze przeznaczone dla ucznia, w szczególności karty pracy, zeszyty ćwiczeń i materiały multimedialne” (rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 8 czerwca 2009 r. *w sprawie dopuszczania do użytku w szkole programów wychowania przedszkolnego i programów nauczania oraz dopuszczania do użytku szkolnego podręczników*). Rozszerza to tradycyjne rozumienie podręcznika jako wydrukowanej książki.

2. Podręczniki do klasy I

Na stronie internetowej MEN początkowo znalazła się lista dwunastu dopuszczonych serii do klas I–III (nie uwzględnia ona zajęć komputerowych oraz podręczników multimedialnych); cztery wydawnictwa zgłosiły po dwie serie. Księgarnie trudniące się sprzedażą podręczników oferują najwyżej parę kompletów; więcej można znaleźć w sprzedaży internetowej.

Uwagę w księgarniach zwraca ogromny wzrost liczby książeczek przewidzianych do kupienia dla jednego ucznia klasy I, po kilkanaście i więcej pozycji w serii.

Na okładkach mamy nadmiar informacji wizualnych. Trudno jest – bez dłuższego, starannego wczytywania się – rozeznać się w strukturze oglądanej w księgarni serii publikacji pod wspólnym tytułem. Biorąc jedną część do ręki, nie znajdujemy nieraz informacji, ile w ogóle jest części dla danej klasy i jakie to części. Czasem nie jest nawet w pierwszej chwili jasne, dla której klasy dana publikacja jest przeznaczona, bo słowa „klasa” brak.

Zróżnicowanie podręczników

Jakkolwiek na każdym z badanych podręczników umieszczone jest krzyczące zapewnienie o dostosowaniu go do nowej *Podstawy Programowej*, w oczy rzuca się, że zakres wymagań stawianych uczniowi rozpoczynającemu naukę w klasie I jest bardzo różny.

Niektóre podręczniki do klasy I zakładają, że trzeba zacząć od zapoznania ucznia z liczbami 1–5 i ich zapisem (np. są tam ćwiczenia na poziomie „połącz liczbę 4 z rysunkiem, na którym jest tyle właśnie narysowanych przedmiotów”). Inne zaś wyraźnie są adresowane do ucznia, który przez rok uczęszczał do klasy zerowej i już na początku roku szkolnego zna zapis liczb i działań w zakresie 10 oraz potrafi dodawać i odejmować w tym zakresie. Tak więc jedne z podręczników są adresowane do 6-latków, inne do 7-latków będących już po roku nauki (przy czym informacji takiej na ogół nie znajdzie się w podręczniku).

Jednakże opisane rozróżnienie jest nadmiernym uproszczeniem, bowiem w podręcznikach wyraźnie zakładających, że uczeń nie uczęszczał do dotychczasowej klasy 0, bywa podawana zaawansowana wiedza, np. w jednym z nich jeszcze przed pokazaniem, jak się pisze cyfrę 1, a więc na samym początku edukacji szkolnej, 6-latek znajduje mapę fizyczną Polski, na której napisano m.in. Nizina

Mazowiecka i Pojezierze Wielkopolskie (takie mapy, na poziomie trudności klas IV–VI znalazłem w podręcznikach do klasy I aż trzech wydawnictw: w jednym z nich na mapie dla 6-latków naliczyłem 60 wydrukowanych nazw geograficznych, w tym takie szczegóły, jak rzeka Barycz). W paru podręcznikach dla I klasy można znaleźć mapę polityczną Europy (z napisami np. „Luksemburg", a nawet zdarza się „Bośnia i Hercegowina"). Rodzice kupujący taki podręcznik nie są zapewne świadomi, że map (ani podobnych kwestii) nie ma w ogóle w *Podstawie Programowej* dla klasy I i dla klas II–III. Znajdują się dopiero w podstawie dla klas IV–VI.

Główne wady

Niezależnie od istotnych różnic zakresu treści, badane podręczniki mają wspólną cechę: są typowymi przykładami tego, co prof. E. Gruszczyk-Kolczyńska nazywa „papierowym sposobem prowadzenia edukacji matematycznej" (Gruszczyk-Kolczyńska, 2009). Opisuje ona trafnie podstawową wadę takiego podejścia: to, co powinno być aktywnością dziecka na prawdziwych konkretach (patyczki, klocki itp.), zostaje zastąpione – wbrew temu, co wiadomo ze współczesnej psychologii rozwojowej – przez oglądanie statycznych rysunków i uzupełnianie abstrakcyjnych schematów na poziomie symbolicznym (standardowych, np. okienek, grafów itp. lub wymyślonych przez autorów).

Następne wady, które będziemy omawiać, to:

– niezgodność z podstawą programową klasy I;
– przedwczesne wprowadzanie pewnych pojęć;
– brak dostatecznej liczby powtórzeń;
– zbyt wczesne przechodzenie do złożonych operacji umysłowych;
– zbyt wczesne przechodzenie do działań odwrotnych;
– przedwczesne wprowadzanie nowych symboli;
– niepotrzebnie wprowadzane, sporadycznie wykorzystywane schematy graficzne;
– zmiany reprezentacji pojęć arytmetycznych utrudniające ich zrozumienie, m.in. nadużywanie strzałek;
– grafy działań wprowadzane jako nowy system symboliczny bez żadnej motywacji wywodzącej się z konkretnych, sensownych czynności dzieci;
– chybione upoglądowienia i pseudoczynnościowe zadania;
– usiłowanie pokazania na rysunkach tego, czego nie da się przedstawić rysunkowo;
– zbyt wczesne stosowanie zaawansowanego szyku prostokątnego;
– pułapka ogólnych poleceń;
– niezrozumiałe polecenia.

Niezgodność z podstawą programową klasy I

Chociaż niewątpliwie rzeczoznawcy Ministerstwa Edukacji Narodowej musieli w swych opiniach napisać, że stwierdzają zgodność podręcznika z nową *Podstawą Programową*, można znaleźć dość istotne rozbieżności. Omówione są one dokładniej w dalszej części, teraz jedynie zasygnalizujemy niektóre z nich:

– niedostateczne wspomaganie rozwoju myślenia operacyjnego;

– włączenie treści, których nie ma w podstawie dla klasy I, a są w podstawie dla klas II–III (znaki < i >, porównywanie różnicowe), przy czym autorzy w żaden sposób nie ostrzegają nauczyciela, że treści te są nadobowiązkowe;

– umieszczenie zadań, których trudność zdecydowanie przekracza możliwości uczniów klasy I, a które nie są w żaden sposób oznakowane jako trudne, nadobowiązkowe lub jako zagadki dla chętnych.

Wspomaganie rozwoju myślenia operacyjnego

W badanych podręcznikach trudno doszukać się czegoś, co ukierunkowane jest na zapewnienie osiągnięcia dwóch pierwszych celów edukacji matematycznej zapisanych w nowej podstawie programowej dla klasy I, a mianowicie:

a) uczeń ustala równoliczność mimo obserwowanych zmian w układzie elementów w porównywanych zbiorach;

b) układa obiekty (np. patyczki) w serie rosnące i malejące, numeruje je; wybiera obiekt w takiej serii, określa następne i poprzednie.

Osoba, która słyszała o poziomie operacji konkretnych w sensie J. Piageta, od razu rozpozna w podanym sformułowaniu dwa podstawowe testy diagnozujące poziom operacyjności myślenia dziecka. Jednakże te wymogi zapisane w podstawie nie znajdują odbicia w analizowanych podręcznikach ani w materiałach metodycznych. Wręcz przeciwnie, znaczna liczba zadań jest pisana w sposób zakładający, że wszyscy uczniowie już potrafią myśleć operacyjnie.

Można zresztą zasadnie spytać, czy **w ogóle jakakolwiek wydrukowana książka może być właściwym narzędziem do osiągnięcia tego typu celów kształcenia**. Cytowane tu cele a i b wymagają wyższego poziomu integracji schematów umysłowych, którą dziecko może osiągnąć jedynie po odpowiednio długich seriach osobiście wykonywanych doświadczeń związanych z liczeniem przedmiotów, połączonych z refleksją nad wynikami liczenia. Nie da się tego celu osiągnąć poprzez najlepsze nawet wyjaśnienia nauczyciela ani tym bardziej przez czytanie tekstów, oglądanie obrazków i wypełnianie zeszytów ćwiczeń.

Nasuwa się ważne pytanie, jak należy rozszerzyć określenie terminu „podręcznik”, aby w przypadku takich wymagań rzeczoznawca mógł dać pozytywną odpowiedź na pytanie, czy opiniowany podręcznik umożliwia uczniom osiągnięcie – na zadowalającym poziomie – wymienionych powyżej umiejętności, określonych w podstawie programowej klasy I.

Wymaganie w klasie I treści, które znajdują się w podstawie programowej dla klas II–III

Zgodnie z zasadą wprowadzoną przez reformę z 1999 r., nauczyciel ma prawo uczyć na lekcjach więcej, niż jest podane w podstawie. Mogą więc takie treści pojawić się też w podręczniku. Nie jest jednak niestety uregulowana przez MEN kwestia, czy takie nadobowiązkowe treści powinny być w podręczniku jasno oznakowane. W przeciwnym razie odbierane są przez nauczyciela i rodziców jako konieczne do opanowania, uważają oni bowiem, że rzeczoznawcy sprawdzili zgodność podręcznika z podstawą programową.

Wszystkie badane podręczniki do klasy I umieszczają symbole < oraz >, których nie ma wśród wymagań po tej klasie (a są wymienione w podstawie dla klas II–III). Często te znaki wprowadza się bardzo wcześnie, gdy uczeń już poznał dopiero parę liczb.

Wprowadzenie znaku < ma sens najwcześniej wtedy, gdy uczeń zna już zapis wszystkich liczb do 10, a jeszcze lepiej, gdy uczeń poznaje liczby do 100. Przecież każde dziecko wie, że pięć to mniej niż osiem, niepotrzebny jest mu do tego nowy, trudny do zapamiętania znak. Natomiast znak ten spełni swoją rolę przy rozstrzyganiu, co np. jest większe: 47 czy 74, 98 czy 102.

W jednym z dopuszczonych podręczników do klasy I znajduje się u góry strony polecenie: „Napisz w okienku taką liczbę, aby zdanie było prawdziwe”, po czym uczeń widzi taki schemat:

$$\boxed{} \xrightarrow[\text{mniejsza o 3}]{\text{Jestem od ciebie}} 4$$

Jest to zadanie na porównywanie różnicowe, jeden z najtrudniejszych typów zadań z programu dawnej II klasy (czyli po obniżeniu wieku szkolnego powinno to przejść do III klasy). Na czym polega specyfika zadań na porównywanie różnicowe? Co powoduje, że są one znacznie trudniejsze niż zwykłe zadania odpowiadające tym samym działaniom arytmetycznym? Otóż ich genezą nie są czynności dziecka lub obserwacja jakichś zmian konkretnych obiektów, jak w przypadku zwykłych zdań na dodawanie i odejmowanie, lecz werbalna informacja o relacji między liczbami.

W przytoczonym tu zadaniu informacja podana jest w jeszcze trudniejszej wersji niż standardowe zadania na porównywanie różnicowe w klasie II, a mianowicie słowa połączone są tu z nowym dla dziecka schematem graficznym.

Ponadto zadanie to nie dotyczy sytuacji z życia, lecz wyimaginowanej konwersacji dwóch liczb, w której „jedna liczba mówi do drugiej”. Jest to dalekie echo kontrowersyjnej metody wprowadzonej ponad 30 lat temu w pewnych eksperymentach edukacyjnych przez belgijską matematyczkę Frédérique Papy-Lenger. Jednakże w jej ujęciu tego typu sytuacja była poprzedzona serią przygotowawczych aktywności dzieci. Podane tu pojedyncze zadanie wyrwane zostało z tej serii, uczeń dostaje je bez żadnego wprowadzenia.

Zadanie to jest dodatkowo utrudnione przez to, że sformułowane jest w postaci wymagającej odwrócenia podanej w zadaniu relacji. Pojawia się jako pierwsze na stronie, nieoznakowane przez autorów jako wykraczające poza podstawę programową.

Niepotrzebnie wprowadzane, sporadycznie wykorzystywane schematy graficzne

Aby wyjaśnić, na czym polega problem, opiszę pewien przykład z jednego z zeszytów ćwiczeń z 2009 r. Uczeń poznał już w podręczniku liczby od 1 do 6 (liczby 7 jeszcze nie było). Poznał też zapisy typu $3 + 2 = \square$. Jednakże zaraz potem w zeszycie ćwiczeń uczeń napotyka inny sposób graficzny zapisu takiej równości, a mianowicie zamiast znaku równości i wyniku zapisanego zwyczajowo na prawo od obliczanego wyrażenia teraz uczeń widzi kółko narysowane nad znakami 3+2, a wynik ma być wpisany (bez znaku równości) w to kółko.

Tak więc uczeń, który dopiero poznał zwykły zapis arytmetyczny, teraz przez jedną lekcję ma używać zupełnie innej formy wizualnej, wymyślonej przez autorów. Zapewne miało to być urozmaicenie ćwiczenia, ale dla sporej części uczniów jest to jedynie niepotrzebne zakłócenie właśnie rozpoczętego uczenia się symbolicznego ujmowania dodawania, abstrakcyjnych liczb, oderwanych od konkretu.

Zmiany reprezentacji pojęć arytmetycznych utrudniające ich zrozumienie

Pojęcie matematyczne może być reprezentowane *symbolicznie* za pomocą cyfr, znaków działań, symboli literowych itp. Może też być reprezentowane *graficznie* w najróżnorodniejszy sposób.

Zgodnie z psychologicznymi koncepcjami Jerome'a Brunera, w naturalnym rozwoju pojęć u dziecka na ogół dane wyobrażenie przedstawiane jest najwcześniej w postaci reprezentacji **enaktywnej** (przez odtwarzanie czynności ruchowych), później czynności ruchowe są powiązane z reprezentacjami **ikonicznymi** (w postaci bardziej lub mniej realistycznych obrazów), a jeszcze później – z reprezentacjami **symbolicznymi** (za pomocą umownych symboli, do których zalicza się słowa mówione i pisane, symbole matematyczne itp.).

Powołując się na źle interpretowanego Brunera, wielu dydaktyków mniemało, że w edukacji wczesnoszkolnej schemat rysunkowy jest łatwiejszy dla dzieci niż zapis symboliczny. Jest to prawdziwe pod pewnymi warunkami, z których najważniejsze jest to, że **owe rysunki tworzy samo dziecko i wywodzą się one z jego wcześniejszych doświadczeń ruchowych.**

Autorzy większości badanych podręczników wydają się wierzyć, że każdy schematyczny rysunek pojawiający się u nich w podręczniku będzie sam przez się zrozumiały dla uczniów. **Jeśli jednak te rysunki nie przedstawiają sytuacji znanej dziecku i zrozumiałej, mniemanie o ich łatwości jest z gruntu fałszywe.**

W polskich podręcznikach dla klas I–III widocznych wiele jest przypadków **wymagania od ucznia przechodzenia od jednej reprezentacji** jakiegoś obliczenia **do innej**, w szczególności:

– wymaganie przejścia od grafów do działań zapisanych w zwykły sposób i odwrotnie: od zwykłego zapisu do grafów;

– wymaganie przejścia od zwyczajnie zapisanych działań złożonych do tych samych działań zapisanych w języku drzew i przejścia odwrotnego, od drzew do zwykłego zapisu.

Kryje się za tym mniemanie, że takie przechodzenie pogłębia rozumienie działań przez ucznia. Byłoby to słuszne, gdyby nie jedno zasadnicze zastrzeżenie: takie przechodzenie jest dla dzieci bardzo trudne i wymaga dość dobrego już pojmowania *obu typów reprezentacji* danych działań. Nakazywanie więc takich zmian reprezentacji w początkowej fazie nauki jest nadmiernie trudne i szkodliwe.

Brak należytego odstępu między różnymi zadaniami lub częściami zadania

Podręczniki do klasy I drukowane są na ogół dużą czcionką i w pierwszej chwili wydaje się, że są czytelne. Jednakże nieraz zdarzają się nadmiernie zapchane fragmenty. Bywa, że między kolejnymi formułami matematycznymi bądź schematycznymi rysunkami zostawiono tak mało miejsca, że wprawdzie nauczyciel bez trudu rozpozna, gdzie kończy się jedno zadanie, a zaczyna drugie, ale dla ucznia tworzy się w ten sposób bardziej złożony twór, z którego ma wyłuskać poszczególne zadania.

Przykład bezsensownego schematu z okienkami i strzałkami z podręcznika szkolnego podają Klus-Stańska i Nowicka (Klus-Stańska, Nowicka 2009; 138).

Nawet stosunkowo proste zadania mogą stać się w oczach ucznia bardzo trudne, gdy koniec jednego jest wizualnie zbyt blisko początku następnego. Jako ilustrację rozważmy następujący przykład:

$$\square + 5 = 9 \square + 3 = 8 \square + 2 = 10$$

Tekst ten, wydrukowany dużą czcionką, może wydać się dobrze czytelny dla ucznia I klasy. Jednakże, jeśli nawet uczeń potrafi już rozwiązać pojedyncze równanie $\square$+5=9, to – zobaczywszy takie trzy równania wydrukowane w ciągu – może nie być w stanie wyodrębnić w nim pojedynczych równań i w efekcie nie da sobie rady. Warto zwrócić uwagę, że nie jest tak ważne, by między kolejnymi znakami $\square$, +, 5, = , 9 były spore odstępy. Mogą być trochę niniejsze. Natomiast kluczowe są odstępy między równaniami. Porównajmy poprzednie równania z poniższymi, złożonymi takimi samymi czcionkami, ale z mniejszymi odstępami wewnątrz równania, przez co zrobiło się więcej miejsca między równaniami:

$$\square{+}5{=}9 \quad \square{+}3{=}8 \quad \square{+}2{=}10$$

Chybione upoglądowienia i pseudoczynnościowe zadania

Oto przykład zadania, z jednego z badanych zeszytów ćwiczeń. Uczeń dostaje je na bardzo wczesnym etapie zapoznawania się z dodawaniem, przed poznaniem całej pierwszej dziesiątki. Ma on przyjrzeć się rysunkowi prowadzącemu do podanego dodawania, a następnie – wzorując się na podanym przykładzie – ma zapisać podobne obliczenia dla innych liczb. W pierwszej linijce rysunku są 3 klocki żółte i 1 niebieski, a następnie 4 klocki, z których 3 są żółte i 1 niebieski. Pod spodem znajduje się napis 3+1=4, który uczeń ma zestawić z rysunkiem klocków. Następnie są małe kwadraciki, które uczeń ma pokolorować (naśladując podany przykład), i większe kwadraty, w które ma, wpisać odpowiednie cyfry tak, by powstał zapis 2+3=5. To, co uczeń widzi, bez kolorów wygląda tak:

$$\begin{array}{ccccc} \square\square\square & & \square & & \square\square\square\square \\ 3 & + & 1 & = & 4 \\ \square\square & & \square\square\square & & \square\square\square\square\square \\ \Box & + & \Box & = & \Box \end{array}$$

Przeanalizujmy popełnione tu błędy dydaktyczne. Domyślamy się, że uczeń ma pierwszą linijkę interpretować następująco: były 3 klocki i jeszcze 1, potem te same klocki zsunięte zostały razem. Gdyby jednak uczeń myślał, że to są 3 klocki i 1 klocek i jeszcze 4 klocki, razem 8 klocków, byłoby to niezgodne z intencją autorów, której uczeń miał się domyślić. Nauczyciel powiedziałby mu, że to błąd, choć uczeń myślał logicznie, zgodnie z tym, co widział na rysunku.

Dawniej od ucznia klasy I wymagano jedynie zapisów o stopniu złożoności typu 2+3=5. Teraz to, co uczeń (o rok młodszy) widzi, jest zatłoczone symbolami (stopień zagęszczenia jest tu wiernie reprodukowany). Ma dokonać wzrokowej analizy całej tej złożonej struktury. Ma pojąć, że duże kwadraciki u dołu pełnią tu zupełnie inną rolę niż małe. Uczeń musi też z obrazkiem $\square\square\square$ u góry skojarzyć w pionie liczbę 3, z przerwą po $\square\square\square$ ma skojarzyć znak +, a z następną przerwą skojarzyć znak –. Musi więc dokonać zarówno analizy poziomej każdego rzędu, jak i analizy pionowej. Tę pionową analizę musi urwać po drugim wierszu, bowiem liczby 3 nie należy kojarzyć z $\square\square$. Ma więc pojąć, że to, co widzi, trzeba interpretować jako dwie pary poziomych układów:

$$\begin{array}{ccccc} \square\square\square & & \square & & \square\square\square\square \\ 3 & + & 1 & = & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \square\square & & \square\square\square & & \square\square\square\square\square \\ \Box & + & \Box & = & \Box \end{array}$$

Autorzy zapewne sądzili, że dostarczają uczniowi okazji do wykonywania czynności na konkretach. Takie czynności są niezbędne, by w umyśle ucznia utworzyły się odpowiednie schematy myślowe. Niestety, zamiast zbierania doświadczeń sprzyjających ukształtowaniu się pojęcia dodawania, uczeń musi borykać się z rozkodowaniem sensu tego, co widzi w podręczniku.

Gdy (z wydatną pomocą nauczyciela) lepszy uczeń przebrnie przez obie części zadania, podręcznik nie daje mu już więcej okazji do wykorzystania tego poprzez wielokrotne powtórzenie podobnych czynności i jego wysiłek zostaje zmarnowany. Słabszy zaś uczeń w ogóle nie pojmie, czego się od niego wymaga w tym zadaniu, i pozostanie z uczuciem nieporozumienia.

Efektem pokazanego tu zabiegu dydaktycznego autorów było to, że łatwe, odpowiednie na początku szkoły dodawanie 3+1 zostało zamienione na zawikłane zadanie, w którym nawet dorosły długo musi się zastanawiać, o co tu chodzi. Gdyby chcieć dostosować to ćwiczenie do możliwości uczniów, należałoby wyrzucić znaczną część tego, co zostało tu wydrukowane, i ograniczyć się do tego, co istotne, a mianowicie zostawić jedynie:

$$\overset{\square\square\square}{3} + \overset{\square}{1} = 4$$

Oczywiście uczeń musiałby dostać całą serię takich zadań, nie tylko jedno.

Dlaczego aż tyle miejsca poświęcam tutaj na omówienie jednego chybionego zadania? Otóż jest to dobry przykład, ukazujący jasno podstawową wadę wielu podręczników, mającą swe źródło w oparciu się na *zadrukowanym papierze jako przekaźniku wiedzy matematycznej. W zadaniu tym wymaga się od ucznia przejścia od jednej reprezentacji działania dodawania (za pomocą małych kwadracików) do drugiej (za pomocą cyfr), w sytuacji gdy działanie to nie jest jeszcze wystarczająco opanowane*.

Takich przykładów źle pomyślanego upoglądowienia arytmetyki można znaleźć w polskich podręcznikach wiele, zbyt wiele. Ma to niewątpliwie negatywny wpływ na jakość kształcenia.

Pułapka ogólnych poleceń

Zeszyty ćwiczeń Zofii Cydzik wprowadziły w 1980 r. nową jakość do polskich podręczników do klasy I (Cydzik 1980). Była to próba czynnościowego nauczania opartego na uzupełnianiu przez uczniów tekstu i rysunków w wydrukowanej, odpowiednio metodycznie opracowanej publikacji. Z czasem przerodziło się to w „papierową matematykę". Przeanalizujemy tu pewne specyficzne cechy wprowadzonego wówczas stylu pisania zeszytu ćwiczeń, co bywa wzorcem dla dzisiejszych zeszytów. Charakterystyczną cechą stylu Cydzik było *dążenie do zwięzłych, możliwie jednozdaniowych, ogólnych poleceń.* Intencją jej było takie formułowanie każdego polecenia, aby objęło ono kilka (czasem kilkanaście) przypadków szczególnych, wydrukowanych pod poleceniem. Wszystkie te przypadki mają wspólny schemat, różnią się zaś doborem danych (liczbami, kolorami, kształtem itp.). Jednakże efektem takich sformułowań często bywają trudne do zrozumienia konstrukcje myślowe i gramatyczne, przekraczające możliwości większości uczniów (a czasem też niezrozumiale dla dorosłego).

Oto przykład: „Pokoloruj jednakowo figury o jednakowym kształcie” (zwrot „figury o jednakowym kształcie” należy tu rozumieć jako „figury podobne w sensie geometrii klas starszych”). Polecenie to dla nauczyciela jest oczywiste. Dla ucznia jest to jednak zadanie złożone. Kryje się za tym wiele niezbędnych operacji umysłowych. Uczeń musi:

a) zrozumieć semantycznie wieloczłonową myśl zdania, poczynając od sensu zwrotu „pokoloruj jednakowo”;

b) rozpoznać poszczególne figury;

c) rozpoznać, które figury mają jednakowy kształt;

d) wybrać jeden z tych kształtów i ustalić, jaki będzie miał kolor;

e) podobnie postąpić z pozostałymi figurami.

To samo zadanie byłoby istotnie łatwiejsze, gdyby zamiast polecenia ogólnego, dać polecenie cząstkowe: „Znajdź koła na rysunku i pokoloruj je na czerwono”. Dopiero po wykonaniu tego, uczeń dostawałby następne polecenia, oparte na zasadniczej idei: skoro już wiesz, co należało zrobić z kołami, postępuj podobnie z innymi figurami.

Oczywiście można przyjąć, że polecenia w podręczniku adresowane są do nauczyciela, który dokona odpowiedniej analizy tekstu i zamieni go na odpowiedni ciąg pojedynczych pytań i poleceń. Niestety zdarza się nazbyt często, że nauczyciel ogranicza się do przekazania jedynie tego, co wydrukowane jest w podręczniku.

Inny przykład: „Odczytaj cyfry zapisane przy pustych pętlach. Dorysuj w każdej tyle elementów, ile wskazują zapisane przy nich liczby”. Bardziej zrozumiałe byłoby to polecenie, gdyby jego pierwszą część ograniczyć do jednej tylko pętli, a przy pozostałych uczeń korzystałby już z tego, czego nauczyłby się przy pierwszej pętli. Tekst polecenia stawałby się jednak zbyt długi.

Podawanie w zeszytach ćwiczeń gotowych szablonów obliczeń

Uczniom narzuca się gotowy schemat kolejnych kroków obliczenia, który należy wiernie naśladować, kopiując to, co napisane jest u góry zadania. Towarzyszy temu często polecenie: *Obliczaj według wzoru.*

Było to podejście stosowane często przez Z. Cydzik, przyjęte potem przez wielu innych autorów. Po wypełnieniu przez ucznia całej strony takich obliczeń nauczyciel może sądzić, że uczeń opanował już podaną metodę. Niestety często ogranicza się to do mechanicznego wstawiania nowych liczb na miejsce danych we wzorze, a uczeń może przy tym zupełnie nie ogarniać struktury narzuconych mu przekształceń. Taki schemat stosowany bywa np. przy dodawaniu z przekroczeniem progu dziesiątkowego:

$$8 + 5 = 8 + 2 + 3 = 10 + 3 = 13.$$

Jest to metoda bardzo trudna dla dzieci, jeśli nie jest naturalnym uogólnieniem czynności wykonywanych uprzednio na konkretach. Ponadto wielu rodziców matematyków denerwowało się, gdy spostrzegło, że zeszyt ćwiczeń ich dzieci wymaga stosowania tej metody również w skrajnym przypadku

$$9 + 10 = 9 + 1 + 9 = 10 + 9 = 19,$$

gdy oczywiście nie ma co tu obliczać, bo uczeń powinien od razu wiedzieć, że 9 i 10 to 19, bez takich sztucznych obliczeń.

Takich szablonów obliczeń bywa wiele. Wiele dzieci obecnie uczy się w II lub III klasie schematu:

$$8 \cdot 5 = (4 + 4) \cdot 5 = 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5 = 20 + 20 = 40.$$

Często takich sztywnych obliczeń wymaga się również od uczniów, który już wiedzą, że $8 \cdot 5 = 40$.

W skrajnym, nonsensownym przypadku przybiera to postać:

$$6 \cdot 10 = 6 \cdot (5 + 5) = 6 \cdot 5 + 6 \cdot 5 = 30 + 30 = 60,$$

w których ucznia zmusza się do obliczania oczywistego iloczynu $6 \cdot 10$ za pomocą trudnych przekształceń.

Grafy

W nauczaniu początkowym przez termin „graf” rozumie się graf skierowany, w którym wierzchołkami są liczby (dane lub niewiadome), a strzałkom przypisane są działania arytmetyczne, interpretowane jako funkcje jednej zmiennej, np. działania „+7” lub „–2” są rozumiane jako przyporządkowanie $x \longrightarrow x+7$ lub $x \longrightarrow x - 2$.

Od ponad 30 lat grafy są modne w polskim nauczaniu początkowym. Jednakże poza szkołą podstawową (a nawet poza klasami początkowymi) środek ten jest rzadko używany. Wypiera go symbolika algebry, która jest uniwersalnym narzędziem matematyki. Grafy, na które poświęca się sporo czasu w klasach I–III, nie są potrzebne ani w dalszej nauce matematyki, ani w życiu codziennym. Wobec tego mają one rację bytu jedynie w takim zakresie, w jakim ułatwiają uczniom opanowanie arytmetyki. Warto je stosować, gdy są użyteczne i stanowią składnik metody ułatwiającej nauczanie.

Grafy można znaleźć w większości badanych podręczników do klasy pierwszej, jednakże na ogół **nie są one wprowadzane w sposób zgodny z naczelną zasadą dydaktyki wczesnoszkolnej, wymagającej, by wszelkie nowe pojęcia matematyczne były wywodzone z przykładów zrozumiałych dla dzieci i powiązanych z manipulowaniem na konkretach.**

Niestety często **wprowadza się w podręczniku grafy jako nowy system znaków**. Jest to system mający formalną składnię i ściśle określone reguły syntaktyczne. Odróżniające, grafy poprawnie narysowane od niepoprawnych. Dominującą w Polsce tendencją jest przedstawianie grafów właśnie jako formalny system, na zasadzie: „Strzałki rysuje się tak a tak”. Nauczyciel mówi uczniom, jak należy rysować strzałki i znaki działań przy nich, a dzieci mają się stosować do tych instrukcji.

Tak wprowadzane grafy nie są bynajmniej ułatwieniem dla uczniów. Dla wielu z nich to utrudnienie, a nawet zapora trudna do przejścia i zniechęcająca do matematyki. W jednym tylko z obecnych podręczników grafy wywodzi się w naturalny sposób z ruchów pionka przy grze w ściganki.

W większości badanych podręczników nie widać też należytej troski o stopniowanie trudności przy zadaniach związanych z grafami. W podręcznikach aż dwóch wydawnictw pierwszy graf, z którym styka się dziecko w I klasie, składa się z 8 działań arytmetycznych! Co więcej, po pokonaniu przez uczniów trudności związanych z nową dla nich formą nie jest to kontynuowane. Zdolni uczniowie, po odpowiednim wyjaśnieniu nauczyciela, potrafią wykonać takie zadanie i nawet odnieść z niego korzyść, dla przeciętnych uczniów jest to jednak zbyt trudne i niepotrzebne.

Grafy z działaniami odwrotnymi pojawiają się często bez przygotowywania uczniów do tego, po prostu z poleceniem „Uzupełnij grafy".

Zbyt wczesne przechodzenie do operacji złożonych

W arytmetyce za zadanie złożone uważa się takie, w którym trzeba wykonać co najmniej dwa działania arytmetyczne. Tradycyjnie takie zadania dawano dopiero w II półroczu klasy II; wiadomo, że sprawiały uczniom spore kłopoty. Po obniżeniu wieku szkolnego nie powinno się ich wymagać przed klasą III.

W jednym z podręczników do I klasy dopuszczonych przez MEN w 2009 r. znajduje się polecenie: „Wykonaj obliczenia. Porównaj wyniki i wstaw w okienka odpowiedni znak: >, < , =", po czym uczeń widzi napisy, takie jak:

$$3 + 1 \ \square \ 4 - 1$$

Zastanówmy się, jakie myślowe operacje arytmetyczne ma tu wykonać uczeń. Ma obliczyć sumę po lewej, obliczyć różnicę po prawej, a następnie dokonać operacji porównania liczb otrzymanych w dwóch poprzednich krokach. W sumie uczeń ma wykonać trzy operacje. Jest to więc zadanie złożone. Umieszczone zostało w podręczniku przeznaczonym docelowo dla 6-latków po 3 lub 4 miesiącach nauki szkolnej, a więc o 2 lata za wcześnie.

Takie zadanie mogłoby ewentualnie pojawić się już w I klasie, gdyby było odpowiednio oznakowane jako zadanie trudne, nieobowiązkowe, jednak w cytowanym podręczniku było to potraktowane jako zadanie dla wszystkich, w domyśle: wymagane.

Pewne zadania, które 20 lat temu były w podręcznikach na II półrocze II klasy (np. rysunki drzew schematyzujących obliczenia złożone) teraz pojawiły się w podręczniku dla dzieci o 2 lata młodszych.

Przedwczesne wprowadzanie nowych symboli

W jednym z podręczników uczeń poznał dopiero dwie liczby: 1 i 2, a już autorzy wprowadzają znaki < i >, choć jedynym przykładem, jaki mogą podać, jest $1 < 2$ i $2 > 1$. Mamy tu nowy znak symbolizujący 6-latkowi abstrakcyjne pojęcie ilustrowany tylko jednym przykładem!

Jest to jaskrawy dowód na niedobrą tendencję zbyt wczesnego wymagania od dzieci przejścia od naturalnego dla nich poziomu czynności na konkretach i słownego ich opisywania do nowych dla nich abstrakcyjnych symboli.

Niezrozumiałe polecenia

Zdarzają się polecenia tak sformułowane, że nie jest jasne, co uczeń ma zrobić. Oto przykłady:

„Otocz pętlą trzecie i dziesiąte jabłko. Co musisz ustalić?”

Można się domyślić, że autor chce, by uczeń ustalił, od której strony będzie liczył. Ale – oprócz niezrozumiałego pytania – stwierdzić można, że uczeń spotkał wcześniej tylko jedno zadanie w tym podręczniku, w którym użyte były liczby porządkowe i wtedy akurat należało liczyć od lewej strony.

„Dopasuj filiżanki do talerzyków. Jaką zasadą będziesz się kierował?”

Co ma na to odpowiedzieć 6-latek? Czy autor oczekuje, że dziecko powie: „Będę się kierował zasadą odpowiedniości wzajemnie jednoznacznej? Wypowiedzi dzieci odnoszące się do wykonywanych czynności są ważnym elementem kształcenia, ale muszą to być *ich* refleksje, wyrażone w *ich* języku, odpowiadające *ich* sposobowi myślenia. Dzieci 6-letnie nie myślą w kategoriach „zasad, którymi miałyby się kierować”. Ponadto oczekuje się, że ich wypowiedzi są w naturalny sposób ukierunkowane przez nauczyciela, dostosowane do tego, co się dzieje w klasie, związane z ujawnionymi lub przewidywanymi wątpliwościami dzieci. Pytania takie są skuteczne, gdy zadaje się je w odpowiednich momentach. Powinny być sformułowane bardziej konkretnie i odnosić się do tego, co dzieci robią, co widzą, co o tym myślą.

Również słowo „dopasuj” jest niezrozumiałe. Gdyby to były prawdziwe lub zabawowe filiżanki i talerzyki, uczeń mógłby kierować się podobieństwem deseniu i postawić filiżanki na spodeczkach. Jak to jednak ma zrobić w podręczniku? Czy ma to zrobić werbalnie? Czy ma rysować strzałki (byłby ich gąszcz)?

Nadużywanie strzałek

Nawet w konwencji papierowej matematyki można znacznie lepiej przedstawiać ćwiczenia uczniom. Większość z dopuszczonych przez MEN publikacji nadużywa mieszanki najprzeróżniejszych umownych środków graficznych, z reguły nie objaśniając ich dzieciom i wymagając, by domyśliły się ich sensu. Niektóre z tych graficznych pomysłów są użyte tylko w jednym zadaniu, inne pojawiają się więcej razy.

Szczególnie często używane są strzałki, traktowane tak, jak gdyby każdorazowo sam fakt ich narysowania wyjaśniał dziecku ich sens. Sens ten zresztą nieraz się zmienia (bez żadnego uprzedzenia czy wyjaśnienia). W jednym z podręczników strzałka może mieć aż 6 różnych znaczeń:

– strzałka jako symbol kierunku, np. „w górę" (tylko w tym jednym sensie strzałka pojawia się w sytuacjach, które może napotkać dziecko, m.in. na znakach drogowych);

– strzałka jako symbol działania arytmetycznego w grafie. Pisana zresztą na dwa różne sposoby w tym samym podręczniku: jako: $\rightarrow\!\!-$ lub $\longrightarrow$

– strzałka jako grot osi;

– strzałka jako symbol równości, zastępująca znak =;

– strzałka jako symbol uporządkowania, zastępująca znaki $<$, $>$;

– strzałka jako symbol przyporządkowania (jednym elementom innych, ukazanych na rysunku).

Okienka

W roku 1977 do programu nauczania matematyki w klasie I szkoły podstawowej wprowadzono równania z niewiadomą $\boldsymbol{x}$. Po roku 1990, choć nadal obowiązywał ten sam program, litera $\boldsymbol{x}$ stopniowo zniknęła z podręczników, zastąpiona została bowiem przez okienko (□). Taka postać, np. □ + 5 = 9, jest istotnie łatwiejsza od postaci $x + 5 = 9$. Równania z okienkami można znaleźć w podręcznikach z 2009 roku. Niestety, często nie są w ogóle przygotowywane dydaktycznie, pozostają nieobjaśnione, po prostu są wydrukowane z poleceniem, np. „Wpisz liczbę".

Co gorsza, zdarza się przy tym, że sens okienka zmienia się parokrotnie w tym samym podręczniku (bez żadnego wyjaśnienia), np. w zadaniu 3 + 1 □ 4 – 1 (analizowanym już powyżej) okienko wcale nie jest symbolem niewiadomej liczby, jak to z pewnym wysiłkiem zrozumiał już uczeń, lecz miejscem, w które dla odmiany należy wpisać jeden ze znaków $>$, $<$, $=$.

Bardziej skomplikowaną sytuację mamy w zadaniu:

„Napisz w okienkach odpowiednie właściwe liczby, tak aby zapisy były prawdziwe 1 + □ = 5 + □ ".

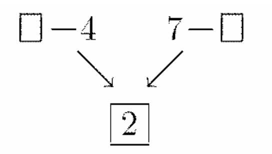
Są tu dwa okienka (!), a nadto w poleceniu jest napisane słowo „liczby". Okienka symbolizują tu dwie różne liczby niewiadome, a więc jest to równanie z dwiema niewiadomymi (oznaczonymi tym samym symbolem okienka). Zadanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań, ale autor zapewne miał na myśli tylko jedno z nich, a mianowicie 1 + 5 = 5 + 1.

Czytając to zadanie, należy więc postępować w sposób, który okazuje się też skuteczny w przypadku niejednego obecnego podręcznika do klasy I: *Próbuj różnych interpretacji tego, co widzisz w zadaniu, aż znajdziesz taką, przy której zadanie da się rozwiązać. Tu jest prawdopodobnie ta interpretacja, którą wymyślił sobie autor.*

Jak widać, zwykłe równania z okienkami mogą nie wystarczyć autorom podręcznika, być może uważają je za zbyt łatwe.

Oto kolejne utrudnione zadanie, w którym jeden schemat graficzny zawiera dwa różne równania.

(*)



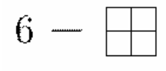
Powyższe zadanie — po domyśleniu się, że skośna strzałka oznacza teraz znak równości - to po prostu dwa zwykłe równania z okienkami:

(**) □–4=2 i 7–□=2,

które są matematycznie tym samym zadaniem co (*), ale zapisanym normalnie, prostszym, bardziej zrozumiałym, mniej udziwnionym. Postać (*) znacznie podniosła poziom operacyjności zadania. Dwa pojedyncze równania (**) mogą być rozpatrywane przez ucznia sekwencyjnie, rozwiązywane po kolei, jedno po drugim, podczas gdy postać (*) tworzy z nich nową, złożoną strukturę.

Jeszcze inną postać równań przedstawia rysunek w podręczniku, na którym uczeń widzi oś liczbową, nad nią 7 pętli, a w każdej pętli znajduje się wyrażenie postaci

(***)



Każda z tych 7 pętli połączona jest krętą strzałką z punktem na osi, np. pętla otaczająca wyrażenie (***) połączona jest z punktem 1. Uczeń ma tu zinterpretować strzałkę jako znak równości, otrzymując w ten sposób równanie □ - □ = 1. Rozwiązanie tego równania ma wpisać w kratkę w pętli. Tym razem zamiast pojedynczego okienka uczeń ma cztery okienka tworzące jedną kratkę. Kratka ta jest zapewne pomyślana jako ułatwienie dla ucznia, który wszak uczęszcza do I klasy i powinien jeszcze pisać cyfry w takich kratkach. Przedtem jednak w tym samym podręczniku niewiadomą uczeń miał wpisywać w pojedyncze okienka.

Brak dostatecznej liczby powtórzeń

Wiele schematów rachunkowo-rysunkowych pojawia się w podręcznikach tylko raz. Wysiłek ucznia włożony w zrozumienie, co autor miał na myśli, nie zostaje spożytkowany do lepszego opanowania czegoś istotnego. Jeśli taki schemat nie jest wart co najmniej kilkunastu powtórzeń, to nie warto go pokazywać nawet raz.

Innym, bardzo poważnym zarzutem pod adresem większości podręczników jest to, że serie zadań mających na celu osiągnięcie jakiegoś celu edukacyjnego są często zbyt krótkie, niekonsekwentne, urywają się wkrótce po ich zaczęciu, by ewentualnie znów kiedyś na chwilę pojawić się wiele stron dalej (co może odzwierciedlać niewłaściwie realizowaną zasadę spiralności nauczania).

Ukształtowanie jakiegokolwiek pojęcia czy umiejętności wymaga odpowiednio pomyślanej serii zabiegów dydaktycznych, przy stopniowym odrywaniu się od konkretu i umiarkowanym podnoszeniu trudności zadań. Należy to kończyć jakimś podsumowaniem dokonanym przez dzieci. Powinny one spróbować opowiedzieć, co robiły, co zauważyły, czego się nauczyły. Wypowiedziane to powinno być ich własnymi słowami, ale najistotniejsza część powinna być potem jeszcze zwerbalizowana przez nauczyciela i potwierdzona jego autorytetem. Wiedzę tę należy utrwalać (zarówno na świeżo, jak i po jakimś czasie), wykorzystując ją do czegoś sensownego i interesującego.

Czym podręcznik ma różnić się od zeszytu ćwiczeń?

Przez kilkanaście lat od wprowadzenia w Polsce zeszytów ćwiczeń do matematyki w klasach I–III głównym kryterium była zasada:

W podręczniku uczeń nic nie pisze

Dążono bowiem do tego, by podręczniki były odsprzedawane następnym uczniom. Natomiast zeszyty ćwiczeń były do jednorazowego użytku. Zasada ta była uzupełniana zasadą odwrotną:

Rozwiązawszy zadanie, uczeń ma zostawić pewien ślad

(coś musi być napisane lub narysowane), inaczej zadanie lepiej umieścić w podręczniku.

Około roku 1975 wydawało się wielkim sukcesem to, że w Polsce ukazały się zeszyty ćwiczeń z matematyki do I klasy. Dziś już wiadomo, że doprowadziły one do wielu niedobrych zjawisk, z których wymienimy najważniejsze:

- dają one uczniom gotowe „półprodukty", co miało ułatwić nauczanie, a z drugiej strony wiele z nich **nie uczy myślenia**;
- pojawiają się w tych zeszytach wymyślone przez autorów pozorne ułatwienia metodyczne, które niestety w efekcie obracają się przeciw dzieciom.

Zeszyty te stworzyły nową specyficzną trudność: **nauczyciel i uczeń mają odgadywać, co autor miał na myśli**. Niejednokrotnie zdarza się, że po trudnym rozszyfrowaniu tej intencji zadanie okazuje się łatwe, nieraz banalne.

Często usiłuje się przedstawić na rysunkach to, czego nie da się w ten sposób przedstawić, np. czynność dzielenia pewnej liczby sztuk na równe części jest łatwa do wykonania na ruchomych liczmanach i praktycznie niewykonalna w papierowej matematyce.

Jedną z podstawowych wad zeszytów ćwiczeń jest to, że wyeliminowały (czasem zupełnie) dawne zwykłe zeszyty w kratkę, które mają ogromne walory kształcące. Wypełnianie gotowych miejsc w wydrukowanych zeszytach nie zastąpi samodzielnego pisania od góry strony przez dziecko.

Zeszyty ćwiczeń przyczyniają się również do zaniedbywania dwóch kluczowych elementów edukacji wczesnoszkolnej: **minupulacji konkretami** oraz **rachunku pamięciowego**.

Materiały metodyczne

Do wielu podręczników wydawcy przygotowali osobne książeczki dla nauczycieli, czasem nawet kilka do jednej serii dla ucznia. Niewiele jest tam jednak informacji dotyczących edukacji matematycznej. Bywają tam programy, rozkłady materiału, czasem propozycje sprawdzianów, jednak z reguły, gdy tekst w podręczniku jest zbyt trudny lub nie jest zrozumiały, w materiałach metodycznych nie znajduje się żadnego wyjaśnienia. Nauczyciele (a także uczniowie i rodzice) zdani są więc jedynie na to, co widzą w podręczniku (lub zeszycie ćwiczeń).

3. Podręczniki do klas II–III

Omówimy w skrócie główne trudności ujawniające się w niektórych z dopuszczonych podręczników.

Porównywanie ilorazowe

Jest to wstęp do stosunków i proporcji. Był to jeden z najtrudniejszych tematów dotychczasowej klasy III. Od 2008 roku jest w *Podstawie Programowej klas IV–VI* (i dalej rozwijane jest w gimnazjum).

Pomimo to w obecnie używanych podręcznikach można znaleźć porównywanie ilorazowe już w klasie II bez żadnej informacji, że jest to materiał trudny i wykraczający poza podstawę programową.

Zbyt wczesne stosowanie zaawansowanego szyku prostokątnego

Szyk taki jest widoczny w układzie kafelków (który może być interpretowany jako fragment sieci kwadratowej), a także w układzie dowolnych elementów, takim jak na poniższych rysunkach:

Wiele podręczników dla klas I i II zakłada, że dla ucznia takie układy są oczywiste. Faktem jest, że dzieci stale się z nimi spotykają, widzą je i znają, ale rozpoznają je całościowo (w sensie *Gestalt)*. Podręczniki wymagają jednak od dzieci umiejętności **wzrokowej analizy** takich szyków i wykorzystanie tej analizy do obliczeń.

Wiadomo, że znaczna część dzieci *w* wieku 6–8 lat nie ma jeszcze ukształtowanych tych schematów umysłowych, które są niezbędne do zrozumienia złożonej struktury szyku prostokątnego (Rożek, 1997). Składają się na nią: struktura poziomych rzędów, struktura pionowych rzędów i rozmaite związki je łączące, np. to, że licząc od góry do dołu z lewej strony pojedyncze elementy (pojedyncze kafelki, serduszka), liczymy zarazem, ile jest poziomych rzędów. Istotą trudności jest to, że dziecko widzi wprawdzie pojedyncze kafelki czy pojedyncze serduszka, ale nie wyodrębnia umysłowo *całych rzędów* (poziomych i pionowych), które należy ujmować jako odrębne, mniejsze całości. Bez zdobycia przez dziecko odpowiednich doświadczeń z wydzielaniem rzędów w takich szykach wszelkie odwołujące się do tego wyjaśnienia w podręczniku będą niezrozumiałe.

Niestety obecne polskie podręczniki do II klasy nie zawierają ćwiczeń, które mogłyby dostarczyć dzieciom niezbędnych doświadczeń związanych z szykiem prostokątnym. Wręcz przeciwnie, wiele z nich w swoich wyjaśnieniach (zwłaszcza przy przemienności mnożenia) zakłada wręcz, że uczniowie osiągnęli już należyty poziom rozumienia takich szyków.

Drzewa działań

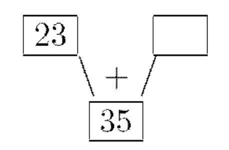
Drzewa stanowią dobrą, poglądową reprezentację arytmetycznych działań złożonych, pod pewnymi jednak warunkami:

– drzewa powinny być odpowiednio wprowadzone dydaktycznie;

– uczniom można dawać drzewa do wypełnienia od góry do dołu (co jest stosunkowo łatwe), natomiast nie powinno się od nich wymagać przedwczesnego budowania **drzew do danych wyrażeń**;

– nie należy dawać działań odwrotnych na drzewach (chyba, że będzie to zadanie o podwyższonym stopniu trudności, należycie oznakowane).

Jednym z częstych błędów jest przedwczesne przechodzenie do takich drzew, w których puste okienka znajdują się powyżej pewnych danych liczb, tzn. pojawiają się uwikłane równania. To nie jest jedynie kwestia kumulowania się trudności równania z trudnością działań złożonych. W grę wchodzi też znana pułapka wizualna, specyficzna dla drzew, która ujawnia się już przy jednym działaniu, np. w sytuacji:



Zgodnie z formalnymi zasadami interpretowania drzew, powyższy diagram jest innym zapisem równania 23+□ = 35, a zatem w okienko należy wpisać liczbę 12. Uczeń jednak zbyt słabo zna zasady dotyczące drzew, by mógł je stosować w sytuacjach wymagających odwracania działań. Widzi on następujące symbole: 23, +, 35, □, więc dodaje 23+35 i wpisuje wynik 58 w okienko. Interpretacja ta, choć niezgodna z intencjami autora podręcznika, narzuca się uczniowi bardzo silnie.

Wprowadzanie pojęć i jednostek związanych z czasem oraz z ważeniem bez przygotowania na konkretach

W wielu podręcznikach pojęcia te wprowadzane są na obrazkach, które mają zastąpić dzieciom zdobywanie niezbędnych doświadczeń przez obserwacje i wykonywanie pomiarów. Ważenie ilustruje się na rysunkach wag szalkowych, których od lat nie ma w użyciu i uczeń mógł nigdy ich nie widzieć.

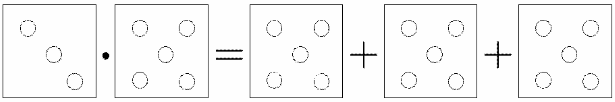
Ponadto jednostki miar wprowadza się formalnie, podając formuły do przeliczania jednych na drugie.

Niewłaściwe objaśnienia i niewłaściwe symbole

Zacytujemy jedynie dwa przykłady, których dydaktyczna niefortunność jest oczywista i szczególnie rzuca się w oczy.

Oto wprowadzenie do jednego z podstawowych pojęć geometrycznych: **Od punktu przy uczniu w klasie poprowadź w myśli prostą drogę. Narysuj to w zeszycie. Narysowałeś odcinek.**

A oto „upoglądowienie” mnożenia, niezgodne z matematycznym sensem pierwszego czynnika w mnożeniu i merytorycznie nieakceptowalne:



4. Podsumowanie

Porównując nowe podręczniki do klas I–III z tymi, które dopuszczone były przed 2008 r., odnotować można – średnio biorąc – pewien postęp. Mniej jest przykładów nieprzemyślanych schematów graficznych, które miały niby upoglądowić nauczanie, a w rzeczywistości stanowiły dużą, niepotrzebną, dodatkową trudność dla uczniów.

Jednak nadal zbyt wiele podręczników zatwierdzonych przez MEN nie jest dostosowanych do naturalnego rozwoju intelektualnego uczniów. Zawierają zbyt abstrakcyjnie (a czasem też nonsensownie) sformułowane zadania i wyjaśnienia.

Po obniżeniu wieku uczniów wszelkie opisane wcześniej niepokojące zjawiska stają się jeszcze poważniejszym zagrożeniem.

Oto najważniejsze wnioski wypływające z prezentowanej tu analizy:

– należy zmierzać do tego, by w świadomości nauczycieli, metodyków, autorów podręczników, rzeczoznawców, osób zajmujących się kształceniem i doskonaleniem nauczycieli oraz rodziców i opinii publicznej **ukształtować właściwe rozumienie źródeł trudności, jakie dzieci mają z matematyką**. Wiele podstawowych informacji z tego zakresu zawierają prace Gruszczyk-Kolczyńskiej (Gruszczyk-Kolczyńska, 1985, 1986, 2009).

– należy rozpowszechniać metody nauczania oparte na **zbieraniu przez dzieci doświadczeń z konkretami**, w kontekście dla nich naturalnym i zrozumiałym, stanowiących niezbędne przygotowanie do bardziej formalnego, symbolicznego ujęcia podstawowych pojęć matematycznych w klasach I–III;

– należy wszystkich uczulać na niewłaściwość dominującej roli „papierowej matematyki" w nauczaniu wczesnoszkolnym;

– Ministerstwo Edukacji Narodowej powinno domagać się od wydawców, aby **treści wyraźnie wykraczające poza podstawę programową** (w szczególności treści zapisane w podstawie dla wyższych klas) **były wyraźnie i jednoznacznie oznakowane**. To samo dotyczy zadań o poziomie trudności wykraczającym poza możliwości przeciętnych dzieci w danym wieku.

BIBLIOGRAFIA

REFERENCES

[1] Cydzik Z., *Ćwiczenia matematyczne dla klasy I*, WSiP, Warszawa 1980.

[2] Gruszczyk-Kolczyńska E. i in., *Diagnoza działalności matematycznej dzieci z klas początkowych. Zestaw testów i wyniki badań,* Uniwersytet Śląski, Katowice 1985.

[3] Gruszczyk-Kolczyńska E., *Dojrzałość operacyjna, rozumowania na poziomie konkretnym jako warunek efektywnego uczenia, się matematyki przez dzieci z klas początkowych*, „Psychologia Wychowawcza" 1986, nr 3.

[4] Gruszczyk-Kolczyńska E. i in., *Wspomaganie rozwoju umysłowego oraz edukacja matematyczna dzieci w ostatnim roku wychowania przedszkolnego i w pierwszym roku szkolnej edukacji,* wyd. Edukacja Polska, Warszawa 2009.

[5] Jaroni E., *Dylematy integrowanej edukacji wczesnoszkolnej,* Oficyna Wydawnicza Impuls, Kraków 2008.

[6] Klus-Stańska D., Nowicka M., *Sensy i bezsensy edukacji wczesnoszkolnej,* WSiP. Warszawa 2009.

[7] Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 8 czerwca 2009 r. w sprawie dopuszczania do użytku w szkole programów wychowania przedszkolnego i programów nauczania oraz dopuszczania do użytku szkolnego podręczników.

[8] Rożek B., *Struktury szeregowo-kolumnowe u dzieci w wieku od 6 do 8 lat.* Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Seria V, „Dydaktyka Matematyki", 1997, t. 19.

[9] *Strategia nauczania matematyki w Polsce – wdrożenie nowej podstawy programowej*, Marciniak Z. (red.), IPWC, Warszawa 2011.

[10] Semadeni Z., *Uwaga na klasę. IV*, cz. I, „Matematyka. Czasopismo dla nauczycieli", 2012a Nr 1.

[11] Semadeni Z., *Uwaga na klasę, IV*, cz. II, „Matematyka. Czasopismo dla nauczycieli", 2012b Nr 2.